第 7 卷(A 版)　第 10 期
2002 年 10 月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 7(A), No. 10
Oct. 2002

一类有理曲线——RB 曲线

梁锡坤
(合肥工业大学计算机与信息学院，合肥　230009)

摘　要　为了进一步丰富 Bézier 曲线理论，首先从 Bernstein 基函数出发，构造了一类新型函数——Bernstein 函数类，同时讨论了它的性质；然后用该类函数给出了 Bézier 曲线类的生成方法；重点研究了一类基于有理形式调配函数的实用曲线——RB 曲线，结果表明，附加权因子的 RB 曲线能部分克服常用的有理 Bézier 曲线的权因子的选取没有统一的规则可以遵循的局限，提高了曲线设计的灵活性；最后给出了实例，并得到了可视化结果.

关键词　Bernstein 函数类　Bézier 曲线类　RB 函数　权因子　RB 曲线

中图法分类号：TP391.72　TP301.6　　**文章标识码**：A　　**文章编号**：1006-8961(2002)10-1058-05

A Kind of Rational Curve——RB Curve

LIANG Xi-kun
(*College of Computer and Information Science, Hefei University of Technology, Hefei* 230009)

Abstract　It is well known that Bézier curve and rational Bézier curve play a very important role in the field of Computer Aided Geometric Design & Computer Graphics. They can be used to generate different curves in given condition. So far, some problems can't be well solved in the regulation of weight factor selecting and the algorithm complexity of curve design. Based on Bernstein polynomials, a new kind of function-Bernstein Function Class is constructed in this paper. Its correlative properties are deduced in details. At the same time, the generating method of Bézier curve class is given. It can be concluded that Bernstein polynomials is a special member of Bernstein function class and the same relation exists between Bézier curve and Bézier curve class. In this article, RB function is chiefly introduced and the method of curve representation based on it is reasoned either. The relation between weighted RB curve and rational Bézier curve is also discussed. It is not difficult to find that weighted RB curve can partly supply the gap of traditional rational Bézier curve in weight factor selecting. So the flexibility of curve design is improved. In the end, some available conclusions and visual consequences are obtained.

Keywords　Bernstein function class, Bézier curve class, RB function, Weight factor, RB curve

0　引　言

在目前主流的 CAD 系统中，Bézier 曲线[1,2]作为曲线生成的方法之一具有重要的地位，它能灵活地生成各种逼近给定的控制多边形的曲线. 但常用的有理 Bézier 曲线的算法一般较复杂，而且权因子的选取也没有统一的规则可以遵循. 这里构造了 Bernstein 函数类，给出了 Bézier 曲线类的生成方法. 一方面，Bézier 曲线类是可以涵盖传统意义上的 Bézier 曲线的曲线类，对它的研究推广了传统意义上的 Bézier 曲线，丰富了 CAGD 的曲线造型方法体系；另一方面，其中的 RB 曲线部分克服了有理 Bézier 曲线的上述缺陷.

1　Bernstein 基函数及有理 Bernstein 基函数

Bernstein 基函数[3]和有理 Bernstein 基函数[4]可分别表示如下

收稿日期：2001-09-13；改回日期：2002-03-22

$$B_{n,i}(u) = C_n^i(1-u)^{n-i}u^i \tag{1}$$

$$\hat{B}_{n,i}(u) = [B_{n,i}(u)W_i] \Big/ \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)W_i \tag{2}$$

其中，$u\in[0,1]$；$i=0,1,\cdots,n$；W_i 为与控制多边形各顶点对应的权因子.

它们具有正性、权性、递推性、对称性等一系列重要性质.

2 Bézier 曲线及有理 Bézier 曲线

设控制多边形的顶点为 V_i，$i=0,1,\cdots,n$，则 n 次 Bézier 曲线[5]和相应的有理 Bézier 曲线[5]可以表示为

$$\overline{P}(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)V_i \tag{3}$$

$$\overline{P}_r(u) = \left[\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)W_iV_i\right] \Big/ \left[\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)W_i\right] \tag{4}$$

它们具有一些良好的几何性质，如插值于首末端点；曲线和特征多边形的首末边相切，首末端切矢模长分别等于首末边长的 n 倍；另外还有凸包性、几何不变性、对称性等.

3 Bernstein 函数类及其性质

大家知道，Bézier 曲线和有理 Bézier 曲线分别采用 Bernstein 基函数和有理 Bernstein 基函数作为生成曲线的基本元素，但有理 Bernstein 基函数是在多项式 Bernstein 基函数的基础上，通过加权及除法运算得到的，设想能否通过其他途径构造出具有类似于 Bernstein 基函数性质的基函数类，使其一方面包含经典的多项式和有理 Bernstein 基函数；另一方面包含新型的有理形式的基函数. 为此，考虑将 Bernstein 基函数重新参数化，用 $f(u)$ 取代 $B_{n,i}(u)$ 中的参数 u，作变换：

$$\tilde{B}_{n,i}(u) = B_{n,i}[f(u)]\,(\Leftrightarrow B_{n,i}(u) = \tilde{B}_{n,i}[f^{-1}(u)]) \tag{5}$$

将由此得到的 $\tilde{B}_{n,i}(u)$ 称为 Bernstein 函数类. 这里，$f(u)$ 满足如下条件：(1) $f(u)\in C^1[0,1]$；(2) $\forall\, u\in[0,1]$，$f(u)\in[0,1]$；(3) $f'(u)>0$ 或 $f'(u)<0$，$\forall\, u\in[0,1]$.

在此对上述条件的解释是：$f(u)$ 在式(5)中的作用类似于参数 u，因而要求它在区间 $[0,1]$ 上连续，且它的值域为 $[0,1]$；又考虑到重新参数化的可逆性，这里要求 $f(u)$ 在 $[0,1]$ 上单调存在反函数 $f^{-1}(u)$. 当 $f(u)=u$ 时，$\tilde{B}_{n,i}(u)$ 就是 $B_{n,i}(u)$，这说明，Bernstein 基函数不过是 Bernstein 函数类的一个特例.

根据 Bernstein 基函数的性质并结合式(5)不难得到 $\tilde{B}_{n,i}(u)$ 具有下列性质：

(1)正性

$$\begin{cases} \tilde{B}_{n,0}(0) = \tilde{B}_{n,n}(1) = 1 \\ \tilde{B}_{n,0}(1) = \tilde{B}_{n,n}(0) = 0 \\ 0 \le \tilde{B}_{n,0}(u),\ \tilde{B}_{n,n}(u) \le 1 \end{cases}$$

$$\tilde{B}_{n,i}(u) \begin{cases} =0, & u=0,1 \\ >0, & 0<u<1 \end{cases} \quad i=0,1,\cdots,n;\ u\in[0,1]$$

即 $0\le \tilde{B}_{n,i}(u) \le 1$，$i=0,1,\cdots,n$，$u\in[0,1]$.

(2)混合性

$$\sum_{i=0}^{n} \tilde{B}_{n,i}(u) \equiv 1$$

(3)最大值

当参数 $u=f^{-1}(i/n)$ 时，$\tilde{B}_{n,i}(u)$ 达到最大值.

(4)导函数

$$\tilde{B}'_{n,i} = nf'(u)(\tilde{B}_{n-1,i-1}(u) - \tilde{B}_{n-1,i}(u))$$

(5)递推性

$$\tilde{B}_{n,i}(u) = (1-f(u))\tilde{B}_{n-1,i}(u) - f(u)\tilde{B}_{n-1,i-1}(u)$$

(6)升阶

$$\tilde{B}_{n,i}(u) = \left(1-\frac{i}{n+1}\right)\tilde{B}_{n+1,i}(u) + \frac{i+1}{n+1}\tilde{B}_{n+1,i+1}(u)]$$

需要说明的是，Bernstein 函数类不一定具有对称性，但它满足

$$\tilde{B}_{n,i}(u) = \tilde{B}_{n,n-i}(f^{-1}((1-f(u)))$$

4 Bézier 曲线类和有理 Bézier 曲线类

设控制多边形的顶点为 V_i，$i=0,1,\cdots,n$，则 Bézier 曲线类及有理 Bézier 曲线类可以分别表示为

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{B}_{n,i}(u)V_i \tag{6}$$

$$P_r(u) = \left[\sum_{i=0}^{n} \tilde{B}_{n,i}(u)W_iV_i\right] \Big/ \left[\sum_{i=0}^{n} \tilde{B}_{n,i}(u)W_i\right] \tag{7}$$

它们和 Bézier 曲线式(3)及有理 Bézier 曲线式(4)的关系分别为

$$P(u) = \overline{P}(f(u)),\ \overline{P}_r(u) = P_r(f(u)) \tag{8}$$

显然，若 $f(u)=u$，则 Bézier 曲线类具体化为 Bézier 曲线，这说明，Bézier 曲线不过是 Bézier 曲线类的一个成员. 依据 Bézier 曲线的性质及式(7)不难证明，Bézier 曲线类具有类似于 Bézier 曲线的一系列几何性质.

5 一类实用的调配函数——RB 函数

5.1 RB 函数

根据前面 $f(u)$满足的基本条件来构造具体的 $f(u)$. 设想 $f(u)$是如 $g(u)/h(u)$的有理形式，考虑 $f(u)$是区间$[0,1]$上的增函数的情形，由于 $f(u)\in[0,1]$，因而有 $f(0)=0, f(1)=1$，这样 $g(u)$应当满足 $f(0)=0$，从而 $g(u)$应当含有因子 u^m，又考虑到 $f(1)=1$，取 $g(u)$的系数为 $\alpha+\beta$，$h(u)=\alpha+\beta u^n$，由此得 $f(u)=\dfrac{(\alpha+\beta)u^m}{\alpha+\beta u^p}$，$\alpha,\beta,m,p\in\mathbf{N}$，进一步得到一类具体的调配函数 $B_{n,i}\left[\dfrac{(\alpha+\beta)u^m}{\alpha+\beta u^p}\right]$. 对 $f(u)$变形得 $f(u)=\dfrac{(1+\beta/\alpha)u^m}{1+(\beta/\alpha)u^p}$，引入 $\beta/\alpha=k$，有

$$f(u)=\frac{(1+k)u^m}{1+ku^n}$$

为了计算简单，取 $m=n=1$ 得

$$f(u)=\frac{(1+k)u}{1+ku}$$

代入式(5)可得

$$RB_{n,i}^{(k)}(u)=\frac{(1+k)^iB_{n,i}(u)}{(1+ku)^n}=\frac{(1+k)^iC_n^i(1-u)^{n-i}u^i}{(1+ku)^n} \tag{9}$$

其中，$u\in[0,1]$，$i=0,1,\cdots,n$.

这里，为避免奇异性，可取 $k>-1$. 将式(9)中的 $n+1$ 个有理形式的函数称为 k 阶$[n/n]$型 RB 函数. 需要说明的是，$f(u)$完全可以采用其他形式，单从计算角度及曲线的后续几何处理过程来看，现有形式是比较简单的.

依据上述 Bernstein 函数类 $\tilde{B}_{n,i}(u)$的性质不难推出 k 阶$[n/n]$型 RB 函数 $RB_{n,i}^{k}(u)$的相关性质.

在式(9)中，若取 $k=0$，则 $RB_{n,i}^{(0)}(u)=B_{n,i}(u)$；又取 $k=1$ 可得

$$RB_{n,i}^{(1)}(u)=\frac{2^iB_{n,i}(u)}{(1+u)^n}=\frac{2^iC_n^i(1-u)^{n-i}u^i}{(1+u)^n} \tag{10}$$

其中，$u\in[0,1]$，$i=0,1,\cdots,n$.

实际上，从函数变换的角度看，$RB_{n,i}^{(1)}(u)=B_{n,i}\left(\dfrac{2u}{1+u}\right)$，而从计算的角度看，$RB_{n,i}^{1}(u)$是 $RB_{n,i}^{(k)}(u)$中较简单的.

5.2 3 类实用的 RB 函数

在式(9)中，分别取 $n=1,2,3$ 即得以下 3 类 RB 函数：

(1) [1/1]型

$$\begin{aligned}RB_{1,0}^{(k)}(u)&=\frac{1-u}{1+ku}\\ RB_{1,1}^{(k)}(u)&=\frac{(1+k)u}{1+ku}\end{aligned} \tag{11}$$

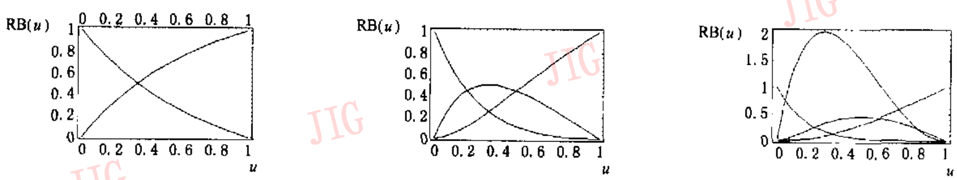
(2) [2/2]型

$$\begin{aligned}RB_{2,0}^{(k)}(u)&=\frac{(1-u)^2}{(1+ku)^2}\\ RB_{2,1}^{(k)}(u)&=\frac{2(1+k)(1-u)u}{(1+ku)^2}\\ RB_{2,2}^{(k)}(u)&=\frac{(1+k)^2u^2}{(1+ku)^2}\end{aligned} \tag{12}$$

(3) [3/3]型

$$\begin{aligned}&RB_{3,0}^{(k)}(u)=\frac{(1-u)^3}{(1+ku)^3}\quad RB_{3,1}^{(k)}(u)=\frac{3(1+k)(1-u)^2u}{(1-ku)^3}\\ &RB_{3,2}^{(k)}(u)=\frac{3(1+k)^2(1-u)u^2}{(1+ku)^3}\quad RB_{3,3}^{(k)}(u)=\frac{(1+k)^3u^3}{(1+ku)^3}\end{aligned} \tag{13}$$

3 种类型的一阶 RB 函数的图形如图 1 所示.



(a) 一阶[1/1]型 RB 函数　(b) 一阶[2/2]型 RB 函数　(c) 一阶[3/3]型 RB 函数

图 1 3 种类型的一阶 RB 函数图形

6 RB 曲线及其性质

6.1 曲线表达式及其性质

定义 1 设控制多边形的顶点为 V_i，$i=0,1,\cdots,n$，基于前述 RB 函数式(11)，称由下式表示的曲线为 k 阶$[n/n]$型 RB 曲线

$$\begin{aligned}P_n^{(k)}(u)&=\sum_{i=0}^{n}RB_{n,i}^{(k)}(u)V_i\\ &=\frac{1}{(1+ku)^n}[(1+k)^0C_n^0(1-u)^nV_0+\cdots+\\ &\quad(1+k)^iC_n^i(1-u)^{n-i}u_iV_i+\cdots+(1+k)^nC_n^nu^nV_n]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(1-ku)^n}[(C_n^0(1-u)^n,\cdots,C_n^i(1-u)^{n-i}u^i,\cdots,C_n^n u^n]\times$$
$$[(1+k)^0V_0,\cdots,(1+k)^iV_i,\cdots,(1+k)^nV_n]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

RB 曲线自首顶点 V_0 开始，至末顶点 V_n 结束，即 $P(0)=V_0$，$P(1)=V_n$. 它和特征多边形的首、末边相切，首、末端切矢模长分别等于首、末边边长的 $(1+k)n$、$n/(1+k)$ 倍. 即：$P'(0)=(1+k)n(V_1-V_0)$，$P'(1)=(n/(1+k))(V_n-V_{n-1})$.

6.2 RB 曲线与有理 Bézier 曲线的关系

n 次有理 Bézier 曲线的表达式为[6]

$$P(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n}B_{n,i}(u)W_iV_i}{\sum_{i=0}^{n}B_{n,i}(u)W_i} \tag{15}$$

式中，$B_{n,i}(u)$ 为 Bernstein 基函数；V_i 为特征多边形控制顶点；$W_i(W_i>0)$ 为对应控制顶点的权因子. 在该式中，取 $W_i=(1+k)^i$，$i=0,1,\cdots,n$，即得 k 阶 $[n/n]$ 型 RB 曲线式(14).

大家知道，有理 Bézier 曲线的权因子选取是曲线设计时一个难以把握的问题，但若采用 k 阶 $[n/n]$ 型 RB 曲线式(14)设计曲线，这个问题则比较简洁方便. 因为此时所有的权因子 W_i 均由一个参数 k 控制，调整曲线形状时，只需变动参数 k 的值即可，这就避免了有理 Bézier 方法中，选取权因子时无所适从的情况. 取 $-1<k<0$，则前面部分控制点对曲线的贡献较大；而取 $k>0$，则后面部分控制点对曲线的贡献较大. 另一方面，鉴于式(14)实际上要比式(15)简单，不难推算，基于 k 阶 $[n/n]$ 型 RB 曲线的一系列算法要比有理 Bézier 曲线的相关算法简单得多.

6.3 [1/1]、[2/2]、[3/3]型 RB 曲线

(1) [1/1]型 RB 曲线

$$P(u)=\frac{1}{1+ku}[(1-u),u]\begin{bmatrix}V_0\\(1+k)V_1\end{bmatrix}\quad u\in[0,1] \tag{16}$$

(2) [2/2]型 RB 曲线

$$P(u)=\frac{1}{(1+ku)^2}[(1-u)^2V_0+2(1-u)u(1+k)V_1+$$
$$u^2(1-k)^2V_2]=\frac{1}{(1-ku)^2}\times$$
$$\begin{bmatrix}u^2\\u\\1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_0\\(1+k)V_1\\(1+k)^2V_2\end{bmatrix}\quad u\in[0,1] \tag{17}$$

(3) [3/3]型 RB 曲线

$$P(u)=\frac{1}{(1+ku)^3}[(1-u)^3V_0+3(1-u)^2u(1+k)V_1+$$
$$3(1-u)u^2(1+k)^2V_2+U^3(1+k)^3V_3]=\frac{1}{(1+ku)^3}\times$$
$$\begin{bmatrix}u^3\\u^2\\u\\1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-1&3&-3&1\\3&-6&3&0\\-3&3&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_0\\(1-k)V_1\\(1+k)^2V_2\\(1+k)^3V_3\end{bmatrix}\quad u\in[0,1] \tag{18}$$

7 附加权因子的 RB 曲线

为进一步提高曲线设计的灵活性，在 k 阶 $[n/n]$ 型 RB 曲线的基础上，给出如下附权 RB 曲线的概念.

定义 2　设控制多边形的顶点为 V_i，$i=0,1,\cdots,n$，称由

$$P_n^k(u)=\frac{(1-k)^0C_n^0(1-u)^nW_0V_0+\cdots+(1+k)^iC_n^i(1-u)^{n-i}u^iW_iV_i+\cdots+(1+k)^nC_n^nu^nW_nV_n}{(1+k)^0C_n^0(1-u)^nW_0+\cdots+(1+k)^iC_n^i(1-u)^{n-i}u^iW_i-\cdots+(1+k)^nC_n^nu^nW_n}$$
$$=\frac{[C_n^0(1-u)^n,\cdots,C_n^i(1-u)^{n-i}u^i,\cdots,C_n^nu^n][(1+k)^0W_0V_0,\cdots,(1+k)^iW_iV_i,\cdots,(1+k)^nW_nV_n]^{\mathrm{T}}}{[C_n^0(1-u)^n,\cdots,C_n^i(1-u)^{n-i}u^i,\cdots,C_n^nu^n][(1+k)^0W_0,\cdots,(1+k)^iW_i,\cdots,(1+k)^nW_n]^{\mathrm{T}}} \tag{19}$$

根据上述定义，附权 RB 曲线可以分为以下几种情形：

(1) $k=0$ 时，附权 RB 曲线即为有理 Bézier 曲线；

(2) $W_i(i=0,1,\cdots,n)$ 取同一常数，此时，附权 RB 曲线即为 RB 曲线；

(3) k 和 W_i 自由变化，对应曲线为一系列类似于有理 Bézier 曲线的曲线，这类曲线的形状可以由控制顶点，权因子及参数 k 三者来调整，曲线设计更加灵活，因而附权 RB 曲线的理论及应用价值都是很高的. 以下是 3 种实用的附权 RB 曲线：

(1) 附权[1/1]型 RB 曲线

$$P(u)=\frac{(1-u)W_0V_0+u(1+k)W_1V_1}{(1-u)W_0+u(1+k)W_1}\quad u\in[0,1] \tag{20}$$

(2) 附权[2/2]型 RB 曲线

$$P(u)=\frac{(1-u)^2W_0V_0+2(1-u)u(1+k)W_1V_1+u^2(1+k)^2W_2V_2}{(1-u)^2W_0+2(1-u)u(1+k)W_1+u^2(1+k)^2W_2}$$
$$u\in[0,1] \tag{21}$$

(3) 附权[3/3]型 RB 曲线

$$P(u)=\frac{(1-u)^3W_0V_0+3(1-u)^2u(1+k)W_1V_1+3(1-u)u^2(1+k)^2W_2V_2+u^3(1+k)^3W_3V_3}{(1-u)^3W_0+3(1-u)^2u(1+k)W_1+3(1-u)u^2(1+k)^2W_2+u^3(1+k)^3W_3}\qquad(22)$$

显然，附权 RB 曲线有类似于有理 Bézier 曲线的一些性质，这里不再赘述.

8 应用实例

如图(2)所示，取 $V_0=(0,1)$，$V_1=(2,3)$，$V_2=(4,3)$，$V_3=(5,1)$，则[3/3]型 RB 曲线为

(1) $k=1, W_0=W_1=W_2=W_3=1$ 时(图 2(a))

$$P_1[x(u);y(u)]=\frac{[4u^3+24u^2+12u;-11u^3-3u^2+15u+1]}{(1+u)^3}$$

(2) $k=1, W_0=3, W_1=1, W_2=0.5, W_3=1$ 时(图 2(b))

$$P_2[x(u);y(u)]=\frac{[5u^3-6u^2+6u;2.5u^3-4.5u^2-3]}{-0.5u^3+4.5u^2-6u+3}$$

(3) $k=1, W_0=1, W_1=2, W_2=1, W_3=2$ 时(图 2(c))

$$P_3[x(u);y(u)]=\frac{[10u^3-12u^2-12u;10u^3-24u^2+15u+1]}{4u^3-6u^2+3u+1}$$

(a) $k=1, W_0=W_1=W_2=W_3=1$　(b) $k=1, W_0=3, W_1=1, W_2=0.5, W_3=1$　(c) $k=1, W_0=1, W_1=2, W_2=1, W_3=2$

图 2 RB 曲线

参 考 文 献

1 Bézier P. The mathematical basis of the UNISURF CAD system [M]. England: Butterworths., 1986:11~72.

2 Les Piegl, Wayne Tiller. The NURBS Book[M]. New York: Springer, 1995:5~34.

3 Gerald Farin. Curves and surfaces for computer aided geometric design[M]. New York: Academic Press, 1988:33~58.

4 张永曙，刘克轩，蒋大为. 计算机辅助几何设计的数学方法[M]. 西安：西北工业大学出版社，1986.

5 关履泰，罗笑南，黎罗罗等. 计算机辅助几何图形设计[M]. 北京：高等教育出版社，1999:177~202.

6 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京：科学出版社，2000:66~87.

梁锡坤 1968年生，1989年获淮北煤炭师范学院数学系理学学士学位，1998年入合肥工业大学理学院攻读计算数学硕士学位，现为合肥工业大学计算机与信息学院博士研究生，研究生部兼职讲师. 主要研究兴趣为数值逼近和计算机辅助几何设计.